2.5.23 Úměrnosti - opakování

Předpoklady: 020522

Př. 1: Auto ujede za a hodin vzdálenost b km. Kolik km by ujelo za c hodin?

Čím déle auto jede, tím větší vzdálenost ujede $\Rightarrow$ přímá úměrnost.¨
a hodin … b km
c hodin … x km

$\frac{x}{c}=\frac{b}{a}$ $/\cdot c$ (vzdálenost ujetá za hodinu se nemění)

$x=\frac{bc}{a}$

Auto ujede za c hodin $\frac{bc}{a}$ km.

Př. 2: Při jízdě rychlostí a dojede auto do cíle za b hodin. Jakou rychlostí by auto muselo jet, aby do cíle dojelo za c hodin?

Čím větší rychlost auta, tím menší čas nutný k dojetí do cíle $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

a km/h … b hodin
x km/h … c hodin
$x\cdot c=a\cdot b$ $/:c$ (vzdálenost, kterou má auto ujet, se nemění)

$x=\frac{ab}{c}$ km/h

Auto musí jet rychlostí $\frac{ab}{c}$, aby do cíle dorazilo za c hodin.

Př. 3: Tři čtvrtě kila jablek stojí 17 Kč. Odhadni, kolik stojí:
a) 1 kg, b) 2,5 kg, c) 5kg, d) 9 kg jablek.
Odhady zkontroluj přesným výpočtem

Hmotnost [kg]	0,75	1	2,5	5	9
Odhad ceny [Kč]	17	23	57	114	205

Spočteme hmotnost 1 kg jablek:
0,75 kg … 17 Kč
1 kg … $17:0,75=17:\frac{3}{4}=17\cdot\frac{4}{3}=\frac{68}{3}=22\frac{2}{3}\doteq 22,70$ Kč

Cenu libovolného množství jablek můžeme spočítat jako hodnotu přímé úměrnosti $y=\frac{68}{3}x$.

Hmotnost [kg]	0,75	1	2,5	5	9
Odhad ceny [Kč]	17				
Vypočtená cena [Kč]		$\frac{68}{3} \doteq 22,70$	$\frac{170}{3} \doteq 56,70$	$\frac{340}{3} \doteq 113,30$	204

V následujících příkladech nejdříve odhadni výsledky (co nejpřesněji). Teprve po kontrole odhadů příklady spočítej.

Př. 4: Petr ušel za třetinu hodiny, tři pětiny cesty. Jak dlouho ještě půjde do cíle?

Čím déle Petr jde, tím větší vzdálenost ujde $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

Odhad
Petrovi zbývá ujít ještě dvě pětiny cesty $\Rightarrow$ vzdálenost, kterou má ujít, je menší v poměru 2:3 $\Rightarrow$ ve stejném poměru se zmenší i doba $\Rightarrow$ Petr ještě půjde dvě devítiny hodiny.

Výpočet

$\frac{3}{5}$ cesty … $\frac{1}{3}$ hod

$\frac{2}{5}$ … x hod

$$\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} \quad / \cdot \frac{2}{5}$$ (vzdálenost, kterou by ušel za hodinu se nemění)

$$x = \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9} \text{ hod}$$

Petr ujde zbytek cesty za dvě devítiny hodiny.

Př. 5: Jirka vytírá podlahu po vydařené oslavě. Už ždímal hadr 25 krát, ale má zatím vytřeny pouze dvě sedminy plochy. Kolikrát ještě bude ždímat hadr?

Čím víckrát Jirka vyždímá hadr, tím větší plochu vytře $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

Odhad
Plocha, kterou má ještě vytřít, je s již vytřenou plochou v poměru 5:2 (je tedy 2,5 krát větší) $\Rightarrow$ počet ždímání musí být také 2,5 krát větší $\Rightarrow$ bude ještě ždímat 63 krát.

Výpočet

$\frac{2}{7}$ plochy … 25 ždímání

$\frac{5}{7}$ plochy … x ždímání

$$\frac{x}{\frac{5}{7}} = \frac{25}{\frac{2}{7}} \quad / \cdot \frac{5}{7}$$ (počet ždímání na celou plochu se nemění)

$x = 25 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7} = 62,5$

Jirka bude muset ždímat hadr ještě 63 krát.

Př. 6: Ze čtvercového pole o straně 200 m sklidil Míra 12,5 tuny pšenice. Kolik pšenice sklidí ze sousedního čtvercového pole o straně 300 m?

Čím větší plocha pole, tím více pšenice sklidíme $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

Odhad: Sklizeň závisí na ploše (ne na délce strany pole). Plocha pole se zvětšila ze $200 \cdot 200$ na $300 \cdot 300$, tedy v poměru 9:4 (více než dvakrát) $\Rightarrow$ sklizeň se také zvětší více než dvakrát $\Rightarrow$ sklizeň bude přibližně 27 tun.

Výpočet

$200 \cdot 200 = 40000\,\mathrm{m}^2$ … 12,5 tuny

$300 \cdot 300 = 90000\,\mathrm{m}^2$ … x tuny

$$\frac{12,5}{40\,000} = \frac{x}{90\,000} \quad / \cdot 90\,000 \qquad \text{(výnos z } 1\mathrm{m}^2 \text{ se nemění)}$$

$$x = \frac{12,5}{40\,000} \cdot 90\,000 \doteq 28,1 \text{ tuny}$$

Ze čtvercového pole o straně 300 m sklidí Jirka 28,1 tuny pšenice.

Pedagogická poznámka: Většina žáků odhaduje výsledek pomocí poměru stran a ne ploch. Neprozrazuji hned správný výsledek, jenom zastavím kontrolu a nechám je hledat chybu. Žáci se správným výsledkem mohou pracovat na příkladech 8 a dál.

Př. 7: Cesta do školy pěšky rychlostí 4 km/h trvá Martině 20 minut. Jak dlouho ji bude trvat cesta na kole, na kterém jezdí pětkrát rychleji?

Čím větší rychlost se Martina pohybuje, tím kratší čas bude na cestu potřebovat $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

Odhad

Pokud se Martiny rychlost pětkrát zvětší, musí se čas pětkrát zkrátit $\Rightarrow$ místo 20 minut bude pojede jen 4 minuty.

Žádný další výpočet není třeba.

Pedagogická poznámka: Příklad je velmi jednoduchý přesto se někteří žáci snaží použít i číslo 4 km/h, čímž si řešení značně zkomplikují.

U následujících příklad nejdříve odhadni výsledek, poté zkus sestavit vzorec pro výpočet úvahou a teprve poté příklad vyřeš klasicky pomocí vícenásobné úměry.

Př. 8: Požární nádrž má tvar kvádru, výška vody se může měnit. Pro tři požární auta stačí voda v nádrži při hloubce 1,5 m na 11 otočení. Na kolik otočení bude stačit nádrž pro pět aut při hloubce vody 1,8 m?

Odhad
Množství vody se zvětšilo o pětinu, množství aut se téměř zdvojnásobilo $\Rightarrow$ voda v nádrži bude stačit na 8 otočení.

Úvaha

- 3 původní auta: čím víc aut původně, tím více vody nádrž obsahuje a tím víckrát se auta musí otočit, aby ji vyčerpala $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{}$,
- původní hloubka 1,5 m: čím větší byla původní hloubka, tím menší je plocha nádrže a tím méně vody se do ní vejde a tím menší počet otoček bude třeba $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{1,5}$,
- 11 původních otočení: čím více otočení musela auta vykonat, tím je nádrž větší a tím více otočení bude muset provést změněný počet aut $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{1,5}\cdot 11$,
- 5 aut: čím více aut je k dispozici, tím menší počet otočení budou muset udělat $\Rightarrow$ $x=\frac{3}{5\cdot 1,5}\cdot 11$,
- 1,8 m: čím vyšší hladina vody, tím víckrát se požární auta musí otočit $\Rightarrow$ $x=\frac{3\cdot 1,8}{5\cdot 1,5}\cdot 11=7,92\doteq 8$ otočení.

Výpočet

3 auta	…	1,5 m	…	11 otočení
5 aut	…	1,8 m	…	x otočení

Zachováme počet aut.

3 auta	…	1,5 m	…	11 otočení
3 auta	…	1,8 m	…	y otočení

Čím vyšší hladina vody, tím větší počet otočení aut $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

$\frac{y}{1,8}=\frac{11}{1,5}$ $\quad /\cdot 1,8$ (počet otočení, které odpovídá snížení hladiny v nádrži o 1 m se nemění)

$y=\frac{11}{1,5}\cdot 1,8=13,2$ otočení

Měníme počet aut.

3 auta	…	1,8 m	…	13,2 otočení
5 aut	…	1,8 m	…	x otočení

Čím více aut vodu odváží, tím méněkrát se musí otočit $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

$x\cdot 5=13,2\cdot 3$ $\quad /:5$ (množství převezené vody se nemění)

$x=\frac{13,2\cdot 3}{5}=7,92$

Při hloubce 1,8 m bude stačit voda v požární nádrži pro pět aut na necelých osm otočení.

Př. 9: Při pěti projížďkách o délce tři pětiny hodiny projede policejní automobil plnou nádrž za pět dní. Po reorganizaci jezdí auto na sedm hodinových projížděk denně. Za kolik dní projede nádrž?

Odhad

Délka projížděk se téměř zdvojnásobila, jejich počet se zvýšil o téměř polovinu $\Rightarrow$ počet dní, na které vydrží plná nádrž se zkrátí na méně než polovinu $\Rightarrow$ auto projede plnou nádrž za dva dny.

Úvaha

- 5 původních projížděk: čím více projížděk denně auto původně jezdilo na jednu nádrž, tím více paliva se do nádrže vejde a tím delší dobu bude na jednu nádrž jezdit i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{5}{}$,
- původní délka projížďky $\frac{3}{5}$ h: čím větší byla původní délka projížďky, tím větší je objem nádrže a tím déle palivo vydrží i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{5 \cdot \frac{3}{5}}{}$,
- původní doba 5 dní: čím déle palivo vydrželo původně, tím větší je nádrž a tím déle vydrží i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{5 \cdot \frac{3}{5}}{} \cdot 5$,
- 7 projížděk: čím více projížděk musí auto udělat, tím rychleji dojde palivo $\Rightarrow$ $x = \frac{5 \cdot \frac{3}{5}}{7} \cdot 5$,
- délka projížďky 1 h: čím delší budou projížďky, tím rychleji dojde palivo $\Rightarrow$ $x = \frac{5 \cdot \frac{3}{5}}{7 \cdot 1} \cdot 5 = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 5} \cdot 5 = \frac{15}{7} \doteq 2{,}14$ dne.

Výpočet

5 projížděk	…	$\frac{3}{5}$ h	…	5 dní
7 projížděk	…	1 h	…	x dní

Zachováme počet projížděk.

5 projížděk	…	$\frac{3}{5}$ h	…	5 dní
5 projížděk	…	1 h	…	y dní

Čím delší projížďky, tím kratší dobu vystačí palivo $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

$\frac{3}{5} \cdot 5 = 1 \cdot y$ (množství paliva v nádrži se nemění)

$y = 3$ dny.

Měníme počet projížděk

5 projížděk	…	1 h	…	3 dny

7 projížděk … 1 h … x dní

Čím delší projížďky, tím kratší dobu vystačí palivo $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

$x \cdot 7 = 5 \cdot 3 \quad / : 7$ (množství převezené vody se nemění)

$x = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7} \doteq 2{,}14$ dne.

Při sedmi hodinových projížďkách denně vystačí palivo v nádrži na 2,14 dne.

Př. 10: Nové super odolné kevlarové střevíčky HamTyDas pro princezny vydrží standardní Sněhurce bílé (NixAlba Album) při sedmi pětihodinových plesech minimálně 9 let (a do té doby se snad Sněhurka vdá). Kolik let by tyto boty vydržely Sněhurce při deseti čtyřhodinových plesech?

Odhad

Počet plesů se zvětší o téměř polovinu, jejich délka se o pětinu zkrátí $\Rightarrow$ doba životnosti střevíčků by se měla o trochu zkrátit, přibližně na 8 let.

Úvaha

- 7 původních plesů: čím více plesů, tím trvanlivější střevíčky a tím delší dobu vydrží i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{7}{}$,
- původní délka plesu 5 h: čím větší původní délka plesu, tím trvanlivější střevíčky a tím delší dobu vydrží i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{7 \cdot 5}{}$,
- původní trvanlivost 9 let: čím déle vydržely střevíčky původně, tím déle vydrží i po změně $\Rightarrow$ $x = \frac{7 \cdot 5}{} \cdot 9$,
- 10 plesů: čím více plesů Sněhurka protančí, tím rychleji střevíčky zničí $\Rightarrow$ $x = \frac{7 \cdot 5}{10} \cdot 9$,
- délka plesu 4 h: čím delší budou plesy, tím rychleji střevíčky protančí $\Rightarrow$ $x = \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 4} \cdot 9 = 7{,}875$ let.

Výpočet

7 plesů … 5 h … 9 let

10 plesů … 4 h … x let

Zachováme počet plesů.

7 plesů … 5 h … 9 let

7 plesů … 4 h … y let

Čím delší plesy, tím kratší dobu vydrží střevíčky $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.

$9 \cdot 5 = 4 \cdot y \quad / : 4$ (počet odtančitelných hodin se nemění)

$y = \frac{9 \cdot 5}{4} = 11{,}25$ let.

Měníme počet plesů.

7 plesů … 4 h … 11,25 let

10 plesů … 4 h … x let

Čím větší počet plesů, tím kratší dobu vydrží střevíčky $\Rightarrow$ nepřímá úměrnost.
$7 \cdot 11,25 = 10 \cdot x \quad /:10$ (počet odtančitelných hodin se nemění)
$x = \frac{7 \cdot 11,25}{10} = 7,875$ let.
Při deseti čtyřhodinových plesech vydrží Sněhurce střevíčky 7,875 let.

Př. 11: Byl jeden král a ten měl tři syny. Nejdříve rozhodl se svůj zlatý poklad rozdělit v poměru $3:2:1$ podle věku, pak mu však něco přes noc přeletělo přes nos, své původní rozhodnutí změnil a zlatý poklad rozdělil v poměru $4:3:2$ (opět podle věku). Jeden ze synů tak dostal o tři zlaté cihly méně. Který z nich to byl? Kolik zlatých cihel měl králův zlatý poklad? V obou případech bylo dělení takové, že nebylo nutné žádnou ze zlatých cihel dělit a žádná nezbyla.

Původní dělení: $3:2:1$ $\Rightarrow$ šest dílů $\Rightarrow$ počet cihel musí být dělitelný šesti.
Nové dělení: $4:3:2$ $\Rightarrow$ devět dílů $\Rightarrow$ počet cihel musí být dělitelný devíti.
$\Rightarrow$ počet cihel musí být dělitelný šesti a devíti $\Rightarrow$ počet cihel je dělitelný 18.

Nejmenším takovým číslem je číslo 18. Zkusíme si spočítat, jak by rozdělení cihel dopadlo.

Dělení 18 cihel

syn	nejstarší	prostřední	nejmladší
staré dělení	9	6	3
nové dělení	8	6	4

Z tabulky je zřejmé, že menší počet cihel dostane nejstarší syn, při rozdělování 18 cihel si pohorší pouze o jednu $\Rightarrow$ zkusíme třikrát větší počet cihel.

Dělení 54 cihel

syn	nejstarší	prostřední	nejmladší
staré dělení	27	18	9
nové dělení	24	18	12

Nejstarší syn dostal o tři cihly méně $\Rightarrow$ králův poklad měl 54 zlatých cihel.

Dodatek: Předchozí příklad je možné vyřešit i bez metody pokus-omyl. Nejstarší syn dostal:
při původním dělení tři ze šesti dílů $\Rightarrow$ $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ pokladu,
při původním dělení čtyři z devíti dílů $\Rightarrow$ $4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ pokladu.
Z toho je zřejmé, že si pohoršil o $\frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18}$ pokladu.

$\frac{1}{18}$ … 3 cihly

$\frac{18}{18}$ … $3 \cdot 18 = 54$ cihel.

Shrnutí: